

نوع العلاقة

$$\cdot: R \times \text{Der}(A) \longrightarrow \text{Der}(A)$$

$$(\alpha, d) \longrightarrow \alpha \cdot d$$

حيث

$$\alpha \cdot d: A \longrightarrow A$$

أثبتت أنه ديفرنتيالي مستقر (دوريتي)

! التناحية (Der(d)) مع العملية الخارجية (·) تُعد مددولاً

$$\forall \lambda \in R \quad \forall d_1, d_2 \in \text{Der}(A)$$

نثبت

$$\cdot \quad \lambda(d_1 + d_2) = \lambda d_1 + \lambda d_2$$

تجميعية التجميعية

$$\forall x \in A: (\lambda d)(x) = \lambda d(x)$$

$$\lambda(d_1 + d_2)(x) = \lambda(d_1 + d_2)(x) = \lambda[d_1(x) + d_2(x)]$$

$$= \lambda d_1(x) + \lambda d_2(x)$$

$$= (\lambda d_1)(x) + (\lambda d_2)(x)$$

$$= (\lambda d_1 + \lambda d_2)(x)$$

$$\Rightarrow \lambda(d_1 + d_2) = \lambda d_1 + \lambda d_2$$

بفعل التجميعية نتحقق من جميع شروط المددول

تجميعية

لكن A حرة فوق الحقل K الدافعية R ولنفرض $d_1, d_2 \in \text{Der}(A)$ عندئذٍ

$$[d_1, d_2]: A \longrightarrow A$$

$$[d_1, d_2] = d_1 \cdot d_2 - d_2 \cdot d_1$$

ديفرنتيالي مستقر مع A

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

البرهان

أصغ $[d_1, d_2]$ تجيب A

$$\forall x, y \in A, [d_1, d_2](x+y) = (d_1 d_2 - d_2 d_1)(x+y)$$

$$= d_1 d_2(x+y) - d_2 d_1(x+y)$$

$$= d_1(d_2(x+y)) - d_2(d_1(x+y))$$

$$= d_1(d_2(x) + d_2(y)) - d_2(d_1(x) + d_1(y))$$

$\in A$

$$= d_1(d_2(x)) + d_1(d_2(y)) - d_2(d_1(x)) - d_2(d_1(y))$$

$$= d_1 d_2(x) + d_1 d_2(y) - d_2 d_1(x) - d_2 d_1(y)$$

$$= (d_1 d_2 - d_2 d_1)(x) + (d_1 d_2 - d_2 d_1)(y)$$

$$= [d_1, d_2](x) + [d_1, d_2](y)$$

تجزئة

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda [d_1, d_2])(x) = (\lambda (d_1 d_2 - d_2 d_1))(x)$$

$$= \lambda (d_1 d_2 - d_2 d_1)(x)$$

$$= \lambda [(d_1 d_2)(x) - (d_2 d_1)(x)]$$

$$= \lambda d_1 d_2(x) - \lambda d_2 d_1(x)$$

$$= (\lambda (d_1 d_2))(x) - (\lambda (d_2 d_1))(x)$$

$$= \lambda (d_1 d_2 - d_2 d_1)(x)$$

$$= \lambda d_1(d_2(x)) - \lambda d_2(d_1(x))$$

$$= d_1(\lambda d_2(x)) - d_2(\lambda d_1(x))$$

$$= d_1(d_2(\lambda x)) - d_2(d_1(\lambda x))$$

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

$$= d_1 d_2 (x) - d_2 d_1 (x)$$

$$= (d_1 d_2 - d_2 d_1) (x)$$

$$= [d_1, d_2] (x)$$

$$[d_1, d_2] (x, y) = (d_1 d_2 - d_2 d_1) (x, y)$$

$$= d_1 d_2 (x, y) - d_2 d_1 (x, y)$$

$$= d_1 (d_2 (x, y)) - d_2 (d_1 (x, y))$$

$$= d_1 (d_2 (x) y + x d_2 (y)) - d_2 (d_1 (x) y + x d_1 (y))$$

$$= d_1 (d_2 (x) y) + d_1 (x d_2 (y)) - d_2 (d_1 (x) y) - d_2 (x d_1 (y))$$

$$= d_1 (d_2 (x)) y + d_2 (x) d_1 (y) + d_1 (x) d_2 (y) + x d_1 (d_2 (y)) - d_2 (d_1 (x)) y - d_1 (x) d_2 (y) - d_2 (x) d_1 (y) - x d_2 (d_1 (y))$$

$$= d_1 d_2 (x) y - d_2 d_1 (x) y + x d_1 d_2 (y) - x d_2 d_1 (y)$$

$$= (d_1 d_2 (x) - d_2 d_1 (x)) y + x (d_1 d_2 (y) - d_2 d_1 (y))$$

$$= (d_1 d_2 - d_2 d_1) (x) y + x (d_1 d_2 - d_2 d_1) (y)$$

$$= [d_1, d_2] (x) y + x [d_1, d_2] (y)$$

ونقول بأن العلاقة [,] تحبس الحتمية

جبرية

لنكن A حزمة فوق الحلقة التبادلية واللاحقة R ، المُدرسة $(\text{Der}(A), +, [,])$ حزمة فوق الحلقة R

البرهان

من أجل أن السلسلة $(\text{Der}(A), +)$ ممدولة فوق R

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

لنرى ثلثية داخلية متماثلة (داخلية)

$$[\cdot, \cdot] : \text{Der}(A) \times \text{Der}(A) \longrightarrow \text{Der}(A)$$

$$(d_1, d_2) \longrightarrow [d_1, d_2]$$

نرى من تعريف السابقة $[\cdot, \cdot]$ تجس

$$\forall (d_1, d_2), (d'_1, d'_2) \in \text{Der}(A) \times \text{Der}(A)$$

نريد

$$(d_1, d_2) = (d'_1, d'_2)$$

$$\Rightarrow d_1 = d'_1, \quad d_2 = d'_2$$

$$\forall x \in A$$

وبالتالي

$$d_1(x) = d'_1(x) \quad d_2(x) = d'_2(x)$$

$$d_1(d_2(x)) = d_1(d'_2(x))$$

$$d_1 d_2(x) = d_1 d'_2(x) \quad *$$

$$d_2(d_1(x)) = d_2(d'_1(x))$$

$$= d_2 d_1(x) = d_2 d'_1(x) \quad **$$

إذا نظرنا $d_2 d_1(x)$ فوجدنا

$$d_1 d_2(x) - d_2 d_1(x) = d_1 d'_2(x) - d_2 d'_1(x)$$

$$(d_1 d_2 - d_2 d_1)(x) = (d_1 d'_2 - d_2 d'_1)(x)$$

$$[d_1, d_2](x) = (d_1 d'_2 - d_2 d'_1)(x)$$

$$[d_1, d_2](x) = [d'_1, d'_2](x)$$

$$\Rightarrow [d_1, d_2] = [d'_1, d'_2]$$

مما يثبت $[\cdot, \cdot]$ تجس

$$\forall x \in A$$

نريد $d_1, d_2, d_3 \in \text{Der}(A)$ و

$$[d_1, d_2 + d_3] = [d_1, d_2] + [d_1, d_3]$$

$$\forall x \in A \rightarrow [d_1, (d_2 + d_3)](x) = (d_1 \cdot (d_2 + d_3)) - ((d_2 + d_3) \cdot d_1)(x)$$

$$= d_1(d_2 + d_3)(x) - (d_2 + d_3)d_1(x)$$

$$= d_1((d_2 + d_3)(x)) - (d_2 + d_3)(d_1(x))$$

$$= d_1(d_2(x) + d_3(x)) - d_2(d_1(x)) - d_3(d_1(x))$$

$$= d_1(d_2(x)) + d_1(d_3(x)) - d_2(d_1(x)) - d_3(d_1(x))$$

$$= [d_1, d_2](x) + [d_1, d_3](x)$$

$$= [d_1, d_2] + [d_1, d_3](x)$$

$$\Rightarrow [d_1, d_2 + d_3] = [d_1, d_2] + [d_1, d_3]$$

نفس الطريقة يمكن إثبات أن $[d_1, d_2] = [d_2, d_1]$ مع الأخذ بعين الاعتبار

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad d_1, d_2 \in \text{Der}(A)$$

لأن $\lambda d_i \in \text{Der}(A)$

$$\lambda [d_1, d_2] = [\lambda d_1, d_2] = [d_1, \lambda d_2]$$

نلاحظ على المثال

$$\lambda [d_1, d_2](x) = \lambda ([d_1, d_2](x))$$

$$= \lambda (d_1 d_2 - d_2 d_1)(x)$$

$$= \lambda (d_1 d_2(x) - d_2 d_1(x))$$

$$= \lambda (d_1 d_2(x)) - \lambda (d_2 d_1(x))$$

$$= \lambda (d_1(d_2(x))) - \lambda (d_2(d_1(x)))$$

$$= \lambda (d_1(d_2(x))) - d_2(\lambda d_1(x))$$

$$= \lambda d_1(d_2(x)) - d_2(\lambda d_1(x))$$

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

$$= (\lambda d_1) d_2 - d_2 (\lambda d_1) \quad (*)$$

$$= [\lambda d_1, d_2] \quad (**)$$

$$\Rightarrow \lambda [d_1, d_2] = [\lambda d_1, d_2]$$

$$\text{Der}(A) \text{ هي مجموعة مشتقات } R$$

مبرهنة

لنكن A حرة فوق الحقل R $d \in \text{Der}(A)$ $n \geq 1$ d مجموع جزئي

$$\forall x, y \in A$$

$$d(x \cdot y) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} d^r(x) \cdot d^{n-r}(y)$$

البرهان: بالستقراء على n

من اجل $n=1$ يكون

$$\sum_{r=0}^1 \binom{1}{r} d^r(x) \cdot d^{1-r}(y) = x d(y) + d(x) \cdot y = d(x \cdot y)$$

نفسه

$$d(x \cdot y) = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} d^r(x) \cdot d^{k-r}(y)$$

لنكن A الحرة فوق الحقل R $k+1$

$$d^{k+1}(x \cdot y) = d \cdot d^k(x \cdot y) = d(d^k(x \cdot y))$$

$$= d \left(\sum_{r=0}^k \binom{k}{r} d^r(x) \cdot d^{k-r}(y) \right)$$

$$= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} d \left(d^r(x) \cdot d^{k-r}(y) \right)$$

$$= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \left[d^{r+1}(x) \cdot d^{k-r}(y) + d^r(x) \cdot d^{k-r+1}(y) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} d^{r+1}(x) \cdot d^{k-r}(y) + \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} d^r(x) d^{k-r+1}(y) \\
&= d^{k+1}(x) \cdot y + \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} d^{r+1}(x) d^{k-r}(y) + x \cdot d^{k+1}(y) \\
&\quad + \sum_{r=1}^k \binom{k}{r} d^r(x) d^{k-r+1}(y) \\
&= (d^{k+1}(x) \cdot y + x \cdot d^{k+1}(y)) + \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} d^{r+1}(x) d^{k-r}(y) \\
&\quad + \sum_{r=1}^k \binom{k}{r} d^r(x) d^{k-r+1}(y)
\end{aligned}$$

لنفرض $t = r+1$ في الحد الثاني (عند $r=0$) $t=1$ في الحد الثالث $t=k$

$$\sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} d^{r+1}(x) d^{k-r}(y) = \sum_{t=1}^k \binom{k}{t-1} d^t(x) d^{k-t+1}(y) \quad r=t-1$$

لنبدل t بـ r في

$$\sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} d^{r+1}(x) d^{k-r}(y) = \sum_{r=1}^k \binom{k}{r-1} d^r(x) d^{k-r+1}(y)$$

نضرب المجموع الأول في x ونضرب

$$d^n(x \cdot y) = (d^{k+1}(x) \cdot y + x \cdot d^{k+1}(y)) + \sum_{r=1}^k \left[\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} \right] d^r(x) d^{k-r+1}(y)$$

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \frac{k!}{(r-1)!(k-r+1)!} + \frac{k!}{r!(k-r)!}$$

$$= \frac{k!}{(r-1)!(k-r+1)!} + \frac{k!}{r!(k-r)!}$$

$$= \frac{k!}{(r-1)!(k-r)!} \left[\frac{1}{k-r+1} + \frac{1}{r} \right] \quad \text{نضرب المقام في } (k-r)!$$

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

$$\frac{k!}{(k-1)!(k-r)!} \left[\frac{r+k-r+1}{r(k-r+1)} \right] = k! \frac{k+1}{r(k-r+1)!} = \frac{(k+1)!}{r!(k-r+1)!} = \binom{k+1}{r}$$

$$\begin{aligned} d^n(x,y) &= (d^{k+1}(x,y) + x d^{k+1}(y)) + \sum_{r=1}^k \binom{k+1}{r} d^r(x) d^{k-r+1}(y) \\ &= d^{k+1}(x,y) + \sum_{r=0}^k \binom{k+1}{r} d^r(x) d^{k-r+1}(y) \\ &= \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} d^r(x) d^{k-r+1}(y) \end{aligned}$$

دالة العادة هي